

FICHA TÉCNICA

DISCO Y ANILLO

FM0751898

Mismo diámetro. Misma masa. Hágalos rodar cuesta abajo para observar la variación en la aceleración entre los 2. Desafíe a sus alumnos a explicar la ciencia detrás de esta demostración clásica de física. Excelente para enseñar la relación entre el momento de inercia y la distribución de masa. Incluye instrucciones.

El experimento del anillo y el disco es una demostración clásica en física diseñada para introducir los conceptos de inercia rotacional, movimiento rotacional y movimiento de rodadura. Tanto el disco como el anillo tienen el mismo diámetro, ancho y masa. Sin embargo, cuando se liberan simultáneamente desde el reposo en el mismo punto de un plano inclinado, el disco acelera más rápido, llegando primero al final del plano inclinado.



Esta demostración no solo introduce estos conceptos, sino que también se puede utilizar para enseñar técnicas de resolución de problemas en movimiento rotacional. En esta actividad, los estudiantes utilizan su conocimiento del movimiento rotacional y la cinemática para predecir cuánto tiempo tardará cada objeto en llegar al fondo del plano inclinado. A través de esta experiencia, los estudiantes pueden comprender mejor el momento de inercia y cómo la distribución de la masa en un objeto rígido determina cómo las fuerzas aplicadas afectan su movimiento.

Esta actividad es adecuada para estudiantes de cursos avanzados de física, como AP[®] Physics, que tienen un buen dominio de álgebra, geometría y trigonometría.

Materiales Necesarios

Juego de Anillo y Disco

Regla de un metro o Cinta métrica

Cronómetro

Transportador

Plano inclinado

Soporte para el plano

Lápiz
Papel
Calculadora con Funciones Trigonométricas
Detector de Movimiento (opcional)
Computadora o Tablet (opcional)
Cámara Digital (opcional)

Parte I: Demostración

Esta demostración es una excelente manera de introducir el concepto de inercia rotacional y comenzar una discusión sobre el movimiento rotacional y el movimiento de rodado. Para llevarla a cabo, prepara un plano inclinado con un ángulo de entre 5 a 10 grados y utiliza una regla métrica para mantener el anillo y el disco en la misma posición en la parte superior del plano inclinado. Antes de mover la regla, se puede pedir a los estudiantes que predigan si uno de los objetos se moverá más rápido que el otro y, de ser así, cuál será.

Luego, retira rápidamente la regla métrica y permite que los objetos rueden hasta el fondo. El disco llegará al final del plano inclinado primero. Después de la demostración, es importante discutir por qué el disco llegó al fondo antes que el anillo. Como extensión de la actividad, puedes incorporar detectores de movimiento o una cámara de video para analizar la velocidad y la aceleración de cada objeto, lo que enriquecerá la comprensión de los estudiantes sobre estos conceptos.

Esta actividad permite que los estudiantes exploren y entiendan mejor la inercia rotacional y cómo la distribución de la masa en un objeto rígido afecta su movimiento bajo la influencia de fuerzas aplicadas.

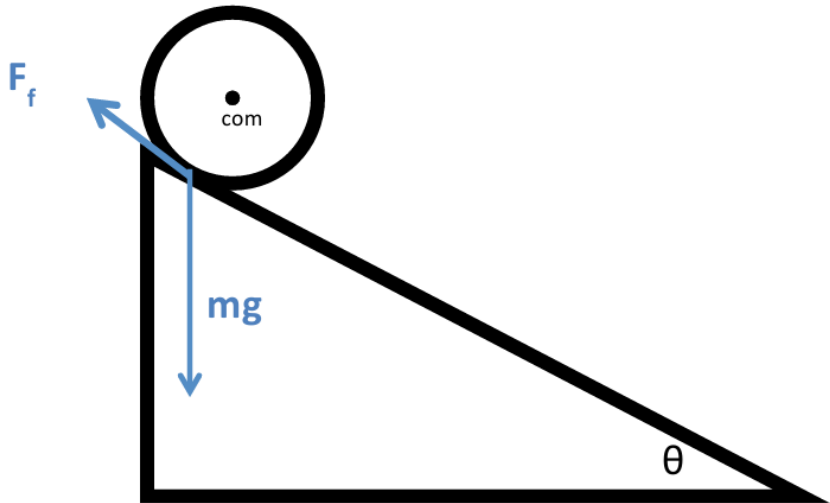
Parte II: Análisis

El objetivo de esta sección es analizar matemáticamente el movimiento de un objeto que rueda sin deslizarse por un plano inclinado. Aquí se presentan dos enfoques para abordar este problema. La primera parte examina las fuerzas que actúan sobre el objeto, y luego se examina el problema utilizando la conservación de la energía.

Para calcular la aceleración del objeto en la rampa, es necesario conocer el momento de inercia de cada objeto. Primero, derive una ecuación para la aceleración en términos del momento de inercia y luego sustituya la expresión correspondiente al momento de inercia de cada objeto.

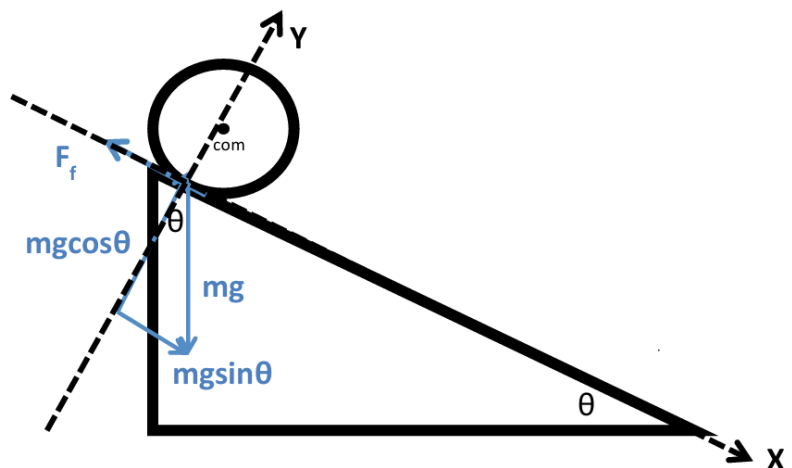
El momento de inercia para objetos geoméricamente simétricos suele encontrarse en tablas. Consulte el Apéndice I de este documento para obtener esta información. Calcular el momento de inercia es un ejercicio completamente matemático. El Apéndice II incluye la derivación del momento de inercia para algunos objetos geométricos básicos, incluidos el disco y el anillo.

m : Masa (kg)
 g : Aceleración debido a la gravedad ($9,8 \text{ m/s}^2$)
 F_x : Fricción (N)
 θ : Ángulo entre la inclinación y la horizontal (grados)
 τ : Torque o momento de fuerza (Nm)
 R : Radio (m)
 V_{xm} : Velocidad del centro de masa (m/s)
 ω : Velocidad angular (rad/s)
 α : Aceleración angular (rad/s²)
 KE : Energía cinética (J)
 I : Momento de inercia (kg m²)
 PE : Energía potencial (J)
 a_{xm} : Aceleración del centro de masa (m/s²)



El objetivo es encontrar una expresión para la aceleración del centro de masa del objeto. Después de encontrar la ecuación para la aceleración traslacional, sustituye ese valor en las ecuaciones cinemáticas para resolver el tiempo y la velocidad. Se asume que el objeto rueda sin deslizarse. Para los fines de este ejercicio, se asumirá que el objeto rota alrededor de su centro de masa.

m = masa (kg)
 g = aceleración debido a la gravedad ($9,8 \text{ m/s}^2$)
 F_f = fricción (N)
 θ = ángulo entre el plano inclinado y la horizontal (grados)
 τ = torque (Nm)
 R = radio (m)
 V_{com} = velocidad del centro de masa (m/s)
 ω = velocidad angular (rad/s)
 α = aceleración angular (rad/s²)
 KE = energía cinética (J)
 I = momento de inercia (kg·m²)
 PE = energía potencial (J)
 a_{com} = aceleración del centro de masa (m/s²)



$$\text{Fuerza} = mg\cos\theta$$

El objeto se acelera en la dirección X. La suma de las fuerzas en la dirección X debe ser igual a la masa del objeto multiplicada por la aceleración del centro de masa.

$$\Sigma F_x = ma_{\text{com}}$$

$$ma_{\text{com}} = mg\sin\theta - F_f$$

El objeto también rueda, por lo que debe haber un torque, τ , actuando sobre el objeto. Este torque se define como:

$$\tau = F_f R$$

(el torque se representa con la letra griega tau o τ). El torque neto en un objeto es igual al momento de inercia del objeto multiplicado por la aceleración angular. (La aceleración angular se representa con la letra griega alfa o α). El torque neto en este caso es proporcionado por la fricción entre el plano inclinado y el objeto.

$$\tau_{\text{NET}} = F_f R = I \alpha$$

$$F_f = I \alpha / R$$

La aceleración angular puede expresarse como:

$$\alpha = a_{\text{com}} / R$$

Sustituyendo en la ecuación de la fuerza de fricción:

$$F_f = I a_{\text{com}} / R^2$$

Sustituye esta expresión para la fuerza de fricción en la ecuación de la suma de las fuerzas en la dirección X:

$$ma_{\text{com}} = mg\sin\theta - I \alpha / R$$

$$ma_{\text{com}} = mg\sin\theta - I a_{\text{com}} / R^2$$

Finalmente, resuelve para la aceleración del centro de masa del objeto:

$$ma_{\text{com}} + (I / R^2) a_{\text{com}} = mg\sin\theta$$

$$a_{\text{com}} (1 + (I / mR^2)) = g\sin\theta$$

$$a_{com} = \frac{g \sin \theta}{1 + \frac{I}{mR^2}}$$

Sustituyendo el momento de inercia de cada objeto en esta ecuación se obtendrá la aceleración traslacional del objeto en un plano inclinado con un ángulo θ .

Una vez que se encuentra la aceleración, el tiempo se puede calcular a partir de la siguiente ecuación de cinemática:

$$d = \frac{1}{2}at^2 + v_i t$$

Donde:

- d es la distancia recorrida (m)
- a es la aceleración (m/s^2)
- v_i es la velocidad inicial (m/s)
- t es el tiempo (s)

La velocidad inicial es cero:

$$v_i = 0 \text{ m/s}$$

Por lo tanto, el tiempo para que el objeto ruede por el plano inclinado es:

$$t = \sqrt{2 \frac{d}{a}}$$

Otra forma de abordar este problema es considerar la energía del sistema. La energía total del sistema debe conservarse en todo momento. Ignorando la energía perdida por fricción y sonido, la energía en el sistema de un objeto que rueda por un plano inclinado se puede contabilizar como energía mecánica en la siguiente ecuación:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

mgh es la energía potencial gravitacional que tiene el objeto en la parte superior del plano inclinado.

$\frac{1}{2}mv^2$ es la energía cinética traslacional que tiene el objeto mientras rueda por el plano inclinado.

$\frac{1}{2}I\omega^2$ es la energía cinética rotacional que tiene el objeto mientras rueda por el plano inclinado.

m = masa (kg)

g = aceleración debido a la gravedad (9.8 m/s^2)

d = distancia (m)

F_x = fricción (N)

θ = ángulo entre el plano inclinado y la horizontal (grados)

τ = torque (Nm)

R = radio (m)

v_{com} = velocidad del centro de masa (m/s)

ω = velocidad angular (rad/s)

α = aceleración angular (rad/s²)

KE = energía cinética (J)

I = momento de inercia (kg·m²)

PE = energía potencial (J)

a_{com} = aceleración del centro de masa (m/s²)

Usando la conservación de la energía, se puede encontrar un valor para la velocidad final. Recuerda que $v = R\omega$.

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}(I)(v^2/R^2)$$

En este punto, sustituye la expresión del momento de inercia para el objeto dado y resuelve para v .

Una vez que se haya encontrado la velocidad final, se pueden utilizar las ecuaciones de cinemática para encontrar el tiempo:

$$d = [(v_f + v_i)/2]t$$

Dado que v_i es cero:

$$t = 2d/v_f$$

Observa que la velocidad del objeto es independiente de la masa y el radio.

Las soluciones para las aceleraciones y las velocidades finales para varios objetos están incluidas en la tabla del Apéndice I.

Preguntas para el Estudiante:

1. ¿Cómo afecta el momento de inercia a la aceleración de un objeto en movimiento de rodadura?
El momento de inercia aparece en el denominador de la ecuación de la aceleración. Por lo tanto, cuanto mayor sea el momento de inercia, menor será la aceleración.

2. ¿Cómo afectan la masa y el radio del objeto a la aceleración de un objeto que rueda?

La aceleración es independiente del radio y de la masa.

3. ¿Cómo se compara la aceleración de un objeto que rueda cuesta abajo con la aceleración de un objeto que se desliza cuesta abajo?

La aceleración $g \sin \theta$ es la aceleración para un objeto que se desliza sin fricción por una pendiente.

La aceleración para un objeto que rueda siempre es una fracción de este valor.

4. ¿Cuánto tiempo tarda un objeto en rodar cuesta abajo?

Este es un caso de aceleración constante que se puede aplicar a las ecuaciones de cinemática:

La ecuación $d = \frac{1}{2}at^2 + v_i t$ proporciona el desplazamiento de un objeto en movimiento con una aceleración constante.

En esta actividad, el objeto en la parte superior de la pendiente comienza en reposo. Por lo tanto:

- $v_i = 0 \text{ m/s}$
- $d = \frac{1}{2}at^2$
- $d = \text{distancia (m)}$
- $a = \text{aceleración (m/s}^2\text{)}$

Resolviendo para t y sustituyendo la aceleración para el objeto que rueda, se obtiene el tiempo necesario para que un objeto ruede cuesta abajo una distancia d :

$$t = \sqrt{2 \frac{d}{a}}$$

Para el anillo :

$$t = \sqrt{4 \frac{d}{g \sin \theta}}$$

Para el disco:

$$t = \sqrt{3 \frac{d}{g \sin \theta}}$$

5. ¿Cuál es el coeficiente mínimo de fricción requerido para que un anillo ruede cuesta abajo sin deslizarse?

$$F_f = \mu F_n = \mu mg \cos \theta$$

$$F_f R = \tau = I \alpha$$

F_f es la fuerza de fricción (N)

τ es el torque neto sobre el objeto en rodadura (Nm)

I es el momento de inercia ($\text{kg} \cdot \text{m}^2$)

a_{com} es la aceleración del centro de masa del objeto (m/s^2)

α es la aceleración angular (rad/s^2)

R es el radio del objeto (m)

$$\mu mg \cos \vartheta = I \alpha R$$

$$\alpha = a/R$$

$$\mu mg \cos \vartheta = [(1/2 m R^2)/R](a/R)$$

$$\mu mg \cos \vartheta = [(1/2 m R^2)/R](2/3 \sin \vartheta / R)$$

$$\mu = 1/3 \tan \vartheta$$

6. Diseña un experimento para medir el tiempo real que toma al disco y al anillo rodar por un plano inclinado con un ángulo de 5 a 10°. ¿Cómo se compara el valor medido con el valor predicho? ¿Cuáles son algunas fuentes de error? ¿Cómo se puede modificar el experimento para obtener mejores resultados?

El montaje experimental requiere un plano inclinado y algún método para registrar los datos. El método más simple es usar un cronómetro. Los datos también se pueden recopilar utilizando sensores de equipos de prueba. La mayoría de los sistemas de equipos de prueba tienen un sensor de movimiento que se puede colocar directamente frente o detrás del objeto en movimiento. Los datos se pueden recopilar con una cámara de video. Las fuentes de error pueden incluir errores humanos y el tiempo de reacción si los estudiantes están usando un cronómetro manual. Esto puede ser considerable si el tiempo total es solo de unos pocos segundos. Las inconsistencias en la superficie de la rampa también contribuyen al error. Si los objetos no ruedan en línea recta, la trayectoria es más larga de lo calculado. Una distancia más larga elimina parte del error humano al usar el cronómetro, pero aumenta la posibilidad de que el objeto se desvíe durante el rodamiento. Realizar cálculos en varios intentos y encontrar un tiempo promedio es una buena manera de obtener mejores resultados.

7. ¿Cómo se podrían modificar el disco y el anillo para afectar su movimiento?

Cambiar la distribución de la masa cambiará la forma en que los objetos ruedan. Si de alguna manera se agregaran pequeñas masas uniformemente a los objetos de una manera que no inhibiera su capacidad para rodar, los objetos tendrían una aceleración menor.

Problema práctico

Un disco sólido con una masa de 1 kg, un radio de 4 cm y un ancho de 1 cm se encuentra en la parte superior de un plano inclinado. La longitud del plano es de 1 m y el ángulo de inclinación es de 30°.

1. Calcula el tiempo que tarda el disco en llegar al fondo del plano inclinado calculando la aceleración.
2. Confirma los resultados utilizando la conservación de la energía.

- 1) El momento de inercia del disco sólido es:

$$I = \frac{1}{2} m R^2.$$

$$a = ((g \sin \vartheta) / (1 + I/mR^2))$$

$$a = \frac{2}{3} g \sin \theta$$

$$a = \left(\frac{2}{3}\right)(9.8 \text{ m/s}^2)(\sin 30^\circ) = 3.26 \text{ m/s}^2$$

$$d = \frac{1}{2} a t^2 + v_i t$$

$$v_i = 0 \text{ m/s}$$

$$t = \sqrt{(2d/a)} = \sqrt{(2\text{m}/3.26\text{m/s}^2)}$$

$$\mathbf{t = 0.78 \text{ s}}$$

$$2) \quad mgh = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} I\omega^2$$

$$mgh = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2}(I)(v^2/R^2)$$

$$mgh = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} mR^2\right)(v^2/R^2)$$

$$gh = \frac{1}{2} v^2 + \frac{1}{4} v^2$$

$$gh = \frac{3}{4} v^2$$

$$v = \sqrt{(4/3 gh)}$$

$$h = d(\sin \theta) = 1\text{m} (\sin 30^\circ) = 0.5\text{m}$$

$$v = 2.56 \text{ m/s}$$

$$d = [(v_f + v_i)/2]t$$

$$v_i = 0 \text{ m/s}$$

$$t = 2d/v_f$$

$$t = (2\text{m})/(2.56 \text{ m/s})$$

$$\mathbf{t = 0.78 \text{ s}}$$

Apéndice I

Forma	Momento de Inercia	Velocidad Final Traslacional	Aceleración Traslacional
Disco (cilindro)	$\frac{1}{2} mR^2$	$\sqrt{(4/3gh)}$	$2/3 g\sin\theta$
Anillo	mR^2	$\sqrt{(gh)}$	$1/2 g\sin\theta$
Esfera sólida	$2/5 mR^2$	$\sqrt{(10/7gh)}$	$5/7 g\sin\theta$
Esfera vacía	$2/3 mR^2$	$\sqrt{(6/5gh)}$	$3/5 g\sin\theta$