

Las flores matemáticas

Por: Francesca Santoro

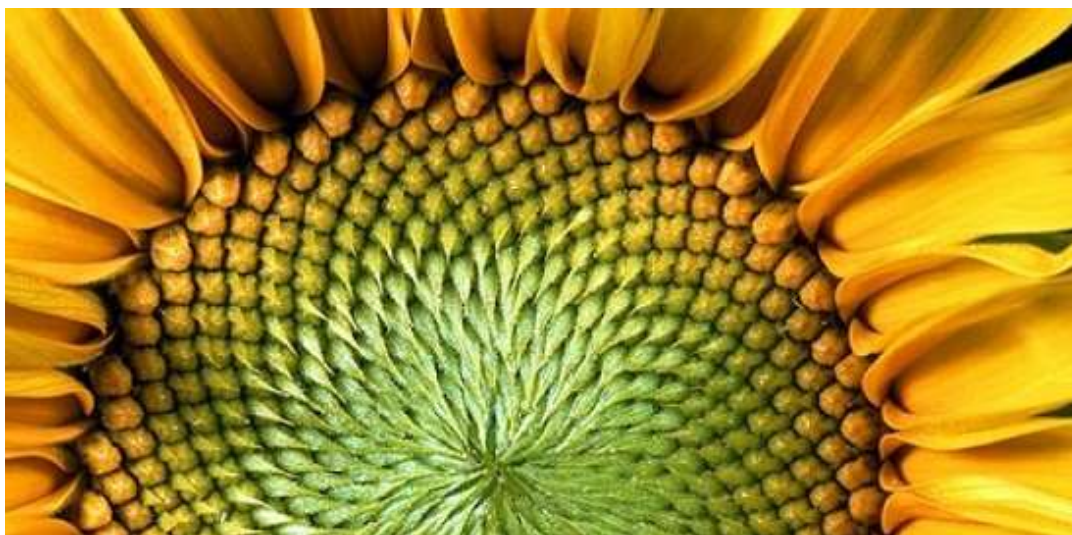
Recuerdo haber visto de pequeña, camino al sur, un campo de grandes flores amarillas, todas orientadas hacia el mismo lado. ¿Qué son? pregunté, “Girasoles”, me respondieron. “Se llaman así porque su flor sigue la dirección del sol”. Sorprendente. Pero eso no es lo único sorprendente.



Su nombre científico es *Helianthus annuus* y tiene otros nombres comunes como maravilla o mirasol. Es originaria de América y tiene fines alimenticios, oleaginosos y ornamentales. Los aztecas e Incas utilizaban el girasol como un símbolo que representaba a la deidad del sol

Efectivamente el nombre Girasol se refiere a que la flor gira según la posición del sol (heliotropismo). El nombre mirasol es más preciso porque indica que tiene fototropismo positivo, es decir, gira hacia donde está la luz. Esto ocurre cuando la planta es joven, cuando madura queda en posición fija hacia el levante.

Las semillas del girasol se encuentran distribuidas en forma de espiral rodeadas de pétalos. El orden de las semillas no es aleatorio, siguen un patrón matemático, estrechamente relacionado con la Sucesión de Fibonacci y Espirales Logarítmicas. ¿Por qué? A continuación, lo descubriremos.



Detalle de una flor de girasol.¹

¹ Foto sacada de <http://www.ecosfera.com/2012/09/las-matematicas-dentro-de-los-girasoles/>

Sucesión de Fibonacci, Razón de Oro y Ángulo Áureo

Leonardo de Pisa² (Leonardo Pisano Bogollo, 1170 a 1250), mejor conocido como Fibonacci, que significa “hijo de Bonaccio”, fue uno de los más grandes matemáticos europeos de la Edad Media. Nació en Pisa, pero vivió en Bougie, Argelia, por el trabajo de su padre en una fábrica mercante. Fue en ese lugar donde el joven Fibonacci recibió su primer entrenamiento matemático con profesores musulmanes. Reconoció rápidamente la enorme superioridad del sistema decimal Hindu-Arábico (el que usamos actualmente) por sobre el torpe sistema Romano todavía utilizado en su país. Los argumentos de su libro “*Liber abaci*” (que significa “Libro del



Ábaco”, escrito en 1202) causaron muy poca impresión

en los comerciantes italianos de su época, pero posteriormente fue el trabajo más influyente para introducir el sistema Hindu-Arábico en occidente.



Hoy en día es ampliamente recordado por la secuencia numérica que aparecía como un problema trivial del libro *Liber Abaci*, a la cual en el siglo 19, el matemático francés Édouard Lucas, llamó la Sucesión de Fibonacci.

³ Página del libro Liber Abaci.

El problema que Leonardo escribió fue el siguiente: Suponga que un par de conejos adultos se colocan al interior de una caja para reproducirse. Asuma que los conejos empiezan a reproducirse dos meses después de su propio nacimiento produciendo sólo una pareja macho hembra y que tienen a esta pareja al final de cada siguiente mes. Si ninguno de los conejos muere, ¿cuántos pares de conejos van a haber encerrados al cabo de un año?

El gráfico muestra lo que sucede durante los primeros cinco meses. La secuencia es 1, 2, 3, 5, 8... donde cada número, como Fibonacci lo hizo ver, es la suma de los dos números que lo preceden. Al cabo de un año, entonces, la cantidad de pares de conejos es de 377.

² Foto sacada de http://es.wikipedia.org/wiki/Leonardo_de_Pisa

³ http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/0/04/Liber_abbaci_magliab_f124r.jpg

Al final del mes

Cantidad de pares



Gráfico de árbol para los conejos de Fibonacci

Fibonacci no investigó la serie y no se hicieron estudios más serios hasta el siglo 19, cuando se comenzó a trabajar en ella y sus estudios se multiplicaron tanto como la serie. Lucas llamó a la serie de números, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21... la Sucesión de Fibonacci, la cual se puede escribir como:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad [1]$$

F_n es el número n en la sucesión de Fibonacci.

F_{n-1} es el número que lo precede.

F_{n-2} es el número que precede al anterior.

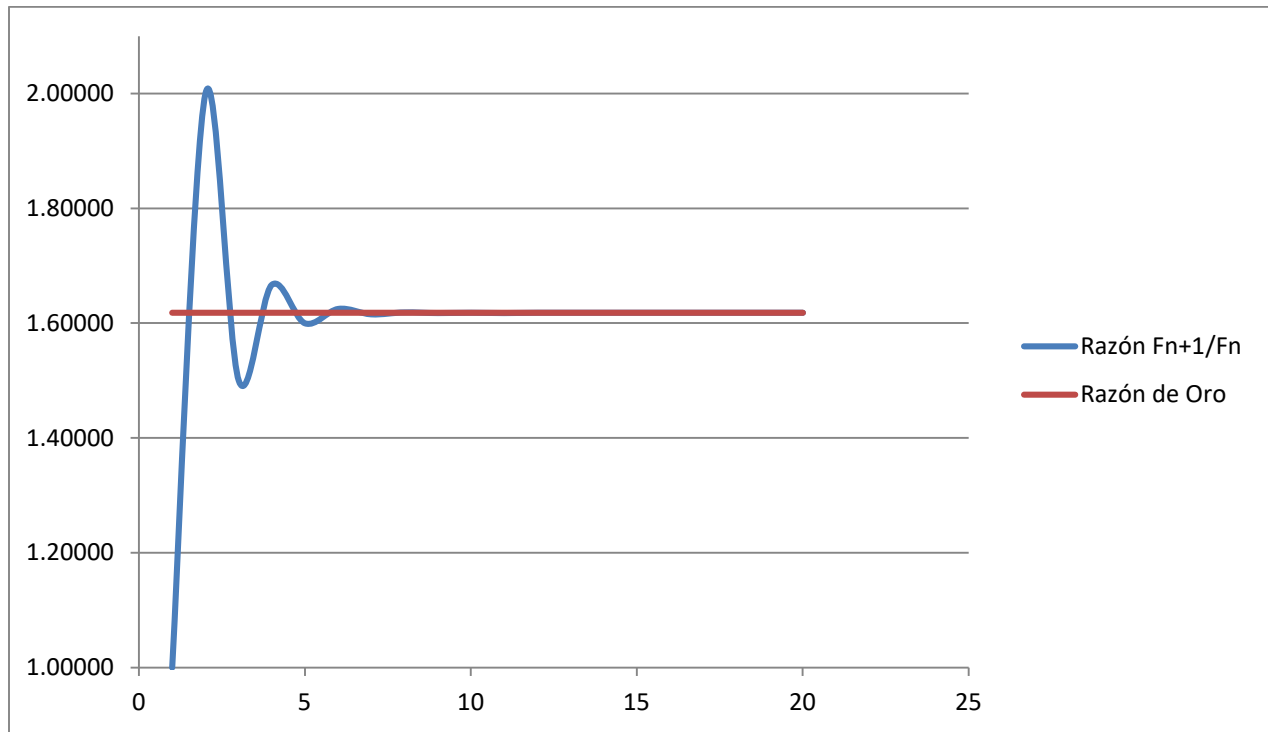
Esta sucesión ha intrigado a matemáticos por siglos, en parte porque ha sido encontrada en **lugares inesperados**.

Seguramente una de las propiedades más notables de la serie de Fibonacci es que la razón entre dos números consecutivos es alternadamente mayor y menor que la Razón de Oro y a medida que la serie avanza la diferencia es cada vez menor; en el límite las razones se acercan a la **Razón de Oro**. Por ejemplo: $3/2 = 1,5$; $5/3 = 1,666$; $8/5 = 1,6$; $13/8 = 1,625$... $12.586.269.025/7.778.742.049 = 1,61803$. La Razón de Oro es un número irracional famoso: 1,61803 que se obtiene al dividir en 2 la suma de 1 con la raíz cuadrada de 5.

n	F_n
1	1
2	1
3	2
4	3
5	5
6	8
7	13
8	21
9	34
10	55
11	89
12	144
13	233
14	377
15	610
16	987
17	1,597
18	2,584
19	4,181
20	6,765
21	10,946
22	17,711
23	28,657
24	46,368
25	75,025
26	121,393
27	196,418
28	317,811
29	514,229
30	832,040
31	1,346,269
32	2,178,309
33	3,524,578
34	5,702,887
35	9,227,465
36	14,930,352
37	24,157,817
38	39,088,169
39	63,245,986
40	102,334,155
41	166,580,141
42	267,914,296
43	433,494,437
44	701,408,733
45	1,134,903,170
46	1,836,311,903
47	2,971,215,073
48	4,807,526,976
49	7,778,742,049
50	12,586,269,025

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad [2]$$

A continuación se muestra el gráfico con la convergencia de la razón de los números sucesivos de Fibonacci a la Razón de Oro:



Existe el también llamado **Ángulo Áureo**, descrito de la siguiente forma:

Si tomamos dos segmentos a y b de manera tal que se cumpla la siguiente igualdad:

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a} \quad [3]$$

Si resolvemos esta ecuación suponiendo que a es mayor que 0 y teniendo en cuenta que la solución de una ecuación de segundo grado está dado por

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - 4a'c}}{2a'} \quad [4]$$

(Llamamos a "a" y "b" de esta ecuación como "a'" y "b'" para que no se confundan con los segmentos a y b de nuestra proporción).

$$a^2 = ab + b^2 \quad [5]$$

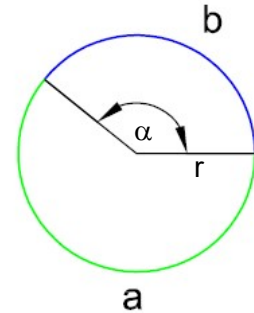
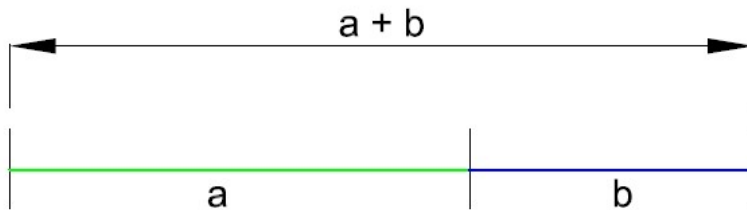
$$a^2 - ba - b^2 = 0 \quad [6]$$

Donde a'=1, b'=-b y c=-b²

$$a = \frac{b + \sqrt{b^2 + 4b^2}}{2} = \frac{b + \sqrt{5b^2}}{2} = \frac{b + \sqrt{5}b}{2} = b \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad [7]$$

$$\frac{a}{b} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \varphi \quad [8]$$

Luego tomamos los extremos de a+b y los unimos formando un círculo de perímetro a+b y radio r.



El ángulo α que se forma en las uniones del segmento a y b se calcula de la siguiente forma:

La longitud del arco de la circunferencia b es igual al radio multiplicado por el ángulo α en radianes

$$b = r \times \alpha \quad [9]$$

$$\text{perímetro} = a + b = 2\pi r \quad [10]$$

$$r = \frac{a + b}{2\pi} \quad [11]$$

$$\alpha = \frac{b}{r} = \frac{b}{\frac{a + b}{2\pi}} = \frac{2\pi b}{a + b} \quad [12]$$

Como de [8] tenemos que

$$b = \frac{a}{\varphi}$$

$$\alpha = \frac{2\pi a}{\varphi(a + b)} = \frac{2\pi}{\varphi^2} = 2,39963 \text{ radianes} \quad [13]$$

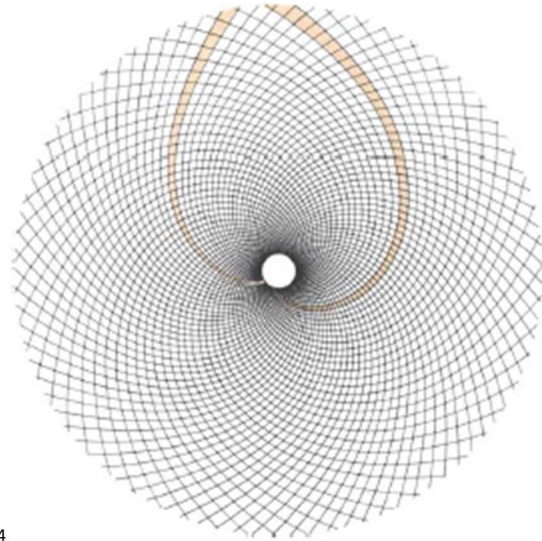
$$\alpha = \frac{2,39963 \times 180^\circ}{\pi} = 137,51^\circ \sim 137,5^\circ \quad [14]$$

Ángulo Áureo es de $137,5^\circ$.

Existe mucha literatura sobre la aparición de la Razón de Oro, la Secuencia de Fibonacci y el Ángulo Áureo en el crecimiento orgánico (naturaleza).

La aparición más llamativa es en el arreglo en espiral de las semillas en la cara de ciertas variedades de girasoles.

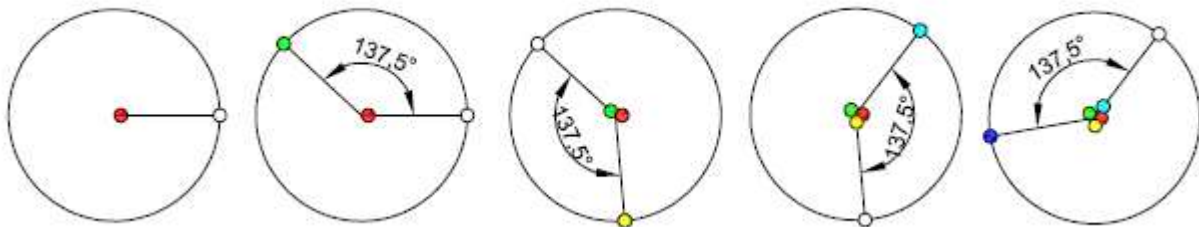
Existen dos sets de espirales, uno en el sentido horario y otro antihorario. El número de espirales de los dos sets es diferente y tienden a ser dos números de Fibonacci consecutivos. Los girasoles en promedio tienen 34 y 55 (F_9 y F_{10}), algunos girasoles gigantes tienen 89 y 144 (F_{11} y F_{12}) y se han encontrado algunos con 144 y 233 (F_{12} y F_{13})



4

Girasol con 55 espirales en sentido antihorario y 89 espirales en sentido horario

Si usamos el Ángulo Áureo aproximado en $137,5^\circ$ y hacemos el siguiente ejercicio:



Aparece la primera semilla y la dibujamos en el ángulo 0° y la llevamos al centro.

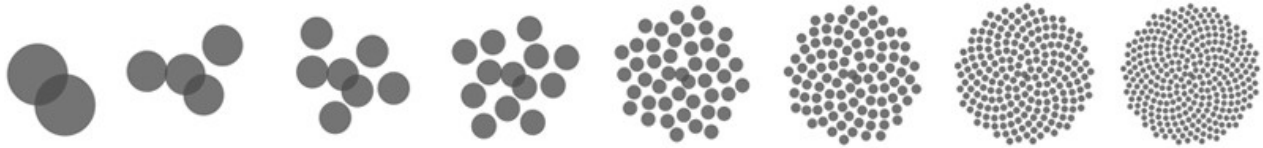
Aparece la segunda semilla. La dibujamos en $137,5^\circ$ con respecto a la primera y la llevamos al costado de la primera.

Aparece la tercera semilla. La dibujamos en $137,5^\circ$ con respecto a la anterior y la llevamos a un costado de la segunda.

⁴ <http://101qs-media.s3.amazonaws.com/largethumbs/450-sunflowers-consulted-fibonacci-for-optimization.jpg>

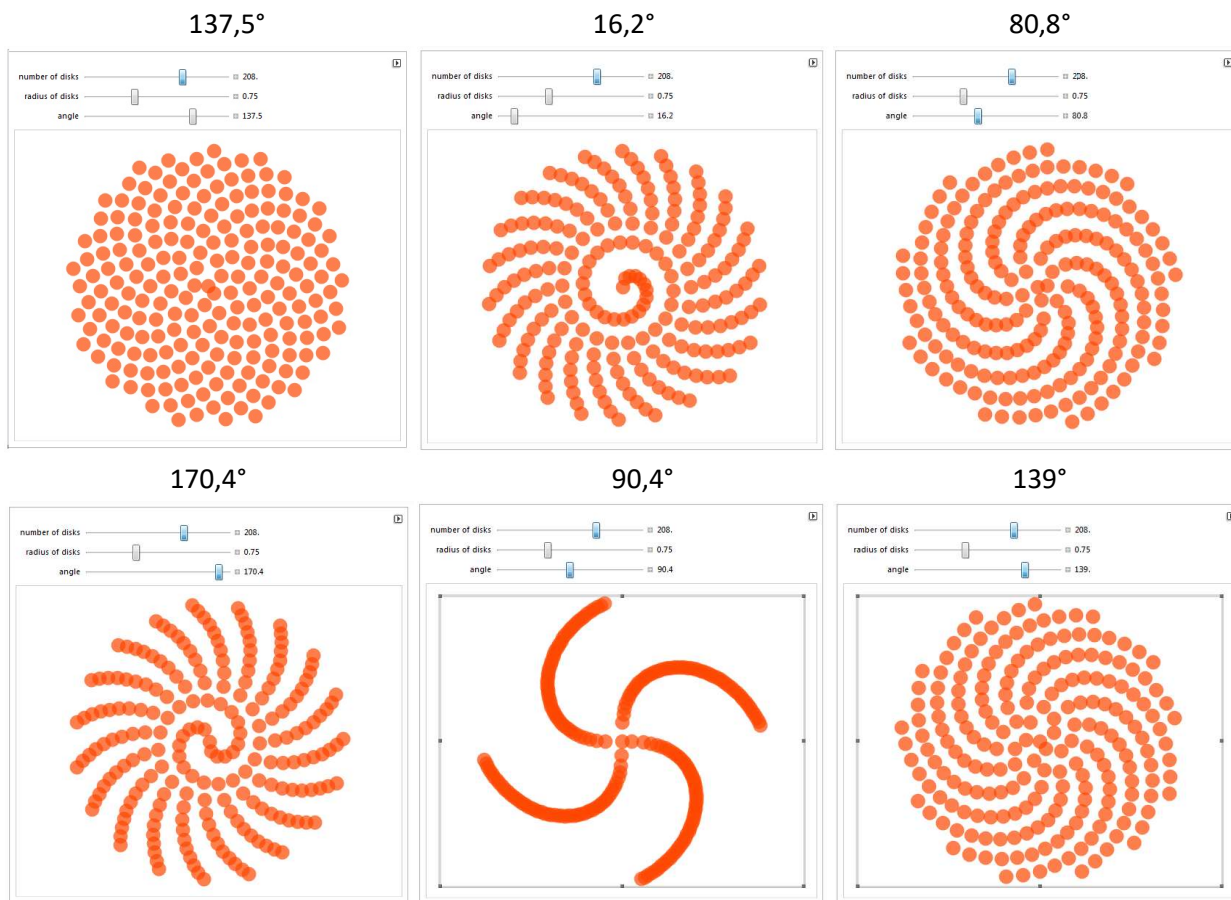
Así sucesivamente con las siguientes semillas que van apareciendo.

Si continuamos haciendo lo anterior obtendremos la siguiente figura⁵:



Que resulta ser la forma más compacta en la que se puede agrupar un conjunto sobre un plano. Y es por esta razón que la naturaleza utiliza esta estructura, es la más eficiente.

Aquí hay algunos ejemplos de espirales con diferentes ángulos⁶:



Esto sucede en muchas otras plantas y flores. Crecen en espirales, desde el centro hacia afuera. Por ejemplo en un tallo, las nuevas hojas salen con este ángulo para que éstas no bloqueen el sol de las

⁵ Imagen obtenida de: <http://fibonacci.ucoz.com/index/ang/anglo-9>

⁶ Programa de <http://demonstrations.wolfram.com/PhyllotaxisSpirals/>

anteriores, o para cubrir el máximo de superficie para recibir lo más posible de lluvia. Y en la naturaleza evolutiva han sido las especies más eficientes las que han sobrevivido. Lo increíble es que un ángulo fijo puede producir un diseño óptimo sin importar cuán grande crezca la planta

Espiral Dorado

Pero eso no es todo. En los girasoles también están presentes los espirales logarítmicos. Todo proceso que gira a tasa constante pero crece o se mueve con una aceleración constante va a generar un espiral logaritmo único.

En la expresión $y = a^m$, se dice que m es el logaritmo de y de base a , es decir el logaritmo de un número es el exponente de una potencia al que debe elevarse la base para obtener dicho número. Por ejemplo el logaritmo de base 5 de 125 es 3 porque $125 = 5^3$.

El uso de logaritmos permite simplificar cálculos complejos de gran cantidad de datos.

Una espiral logarítmica, espiral equiangular o espiral de crecimiento es una clase de curva espiral que aparece frecuentemente en la naturaleza.

El término lo acuñó por primera vez Pierre Varignon, fue estudiada por Descartes y Torricelli, pero quien la estudió en profundidad fue Bernoulli, que la llamó "Spira mirabilis" (la Espiral Maravillosa).

La fórmula del espiral logarítmico en coordenadas polares⁷ (r, θ) es

$$r = ab^{\theta} \quad [15]$$

Donde r es el radio, a es un factor de escala que determina el tamaño del espiral y b controla cuán fuerte y en qué dirección está enrollado el espiral.

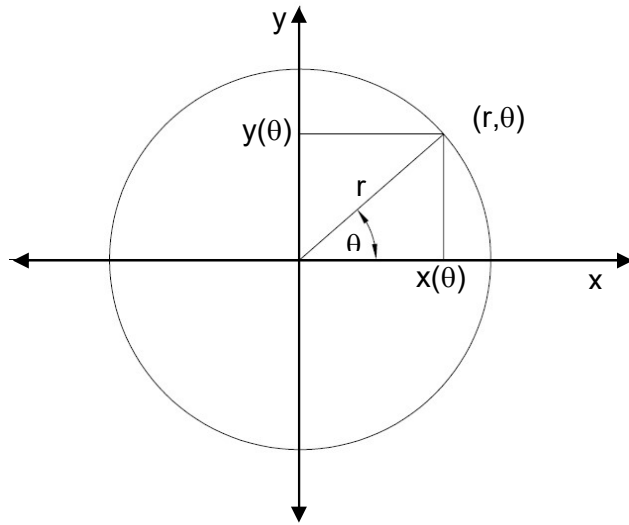
En términos logarítmicos la fórmula se escribe como:

$$\theta = \log_b \frac{r}{a} \quad [15]$$

De ahí su nombre.

Si lo queremos expresar en términos paramétricos para dibujarlo en un sistema cartesiano:

⁷ La notación polar se refiere a un sistema de coordenadas bidimensional en el cual cada punto del plano se determina por una distancia y un ángulo, ampliamente utilizados en física y trigonometría.



$$x(\theta) = r \cos(\theta) = ab^\theta \cos(\theta) \quad [16]$$

$$y(\theta) = r \sin(\theta) = ab^\theta \sin(\theta) \quad [17]$$

Uno de los espirales logarítmicos es el **Espiral Dorado** cuya razón de crecimiento está relacionado con φ . Este espiral aparece en nuestro girasol.

Recordemos que una espiral logarítmica está dado por:

$$r = ab^\theta$$

En el caso del **Espiral Dorado** $b = e^c$, cuyo valor se relaciona con φ cuando θ es de 90° y “e” es la constante matemática aproximada a 2,71828, base del logaritmo natural. Es decir, la fórmula para el Espiral Dorado es

$$r = ae^{c\theta} \quad [18]$$

En términos logarítmicos

$$\theta = \frac{1}{c} \ln\left(\frac{r}{a}\right) \quad [19]$$

Siendo e la base del logaritmo natural, a es una constante real positiva y c es tal que cuando el ángulo θ es un ángulo recto:

$$e^{c\theta_{recto}} = \varphi \quad [20]$$

Por lo tanto, c se encuentra determinado por

$$c = \frac{\ln \varphi}{\theta_{recto}} \quad [21]$$

El valor numérico de c depende de si el ángulo θ es medido en grados o radianes; como c puede tomar valores positivos o negativos según el signo de θ lo más sencillo es indicar su valor absoluto:

$$|c| = \frac{\ln \varphi}{90} = 0,0053468^\circ \quad [22]$$

$$|c| = \frac{\ln \varphi}{\frac{\pi}{2}} = 0,306349 \text{ radianes} \quad [23]$$

En términos paramétricos para poder dibujar un espiral en un plano cartesiano:

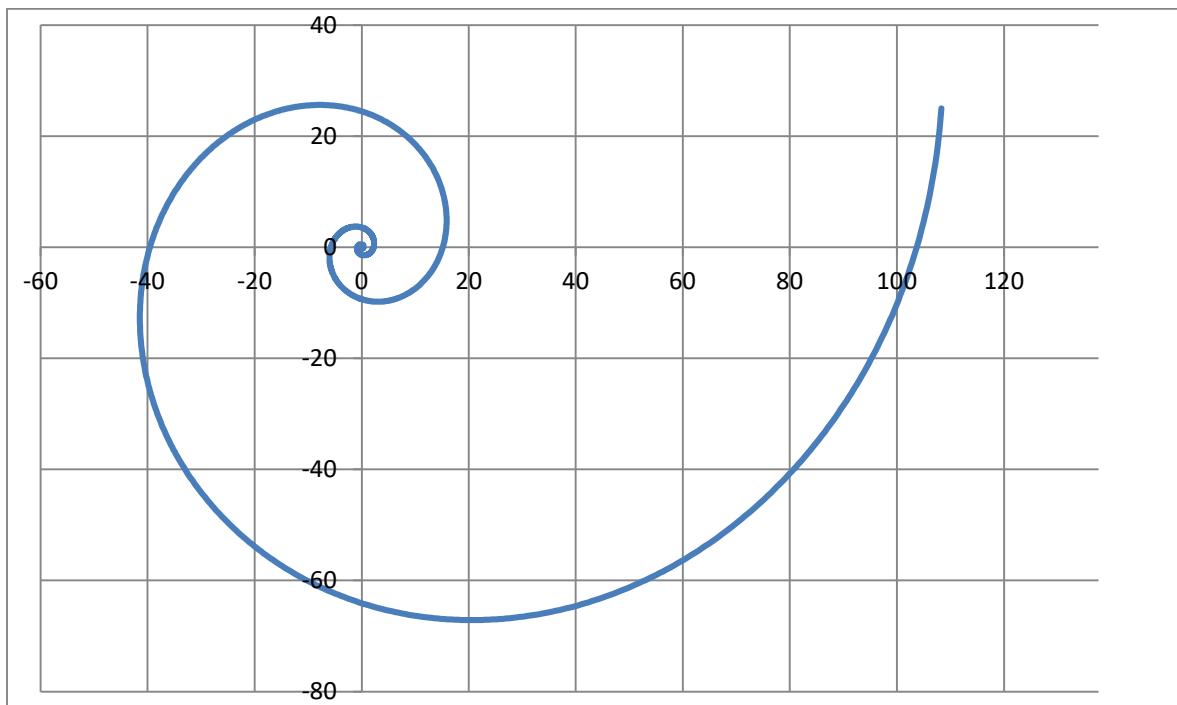
$$x(\theta) = r \cos \theta = a \times e^{c\theta} \times \cos \theta \quad [24]$$

$$y(\theta) = r \sin \theta = a \times e^{c\theta} \times \sin \theta \quad [25]$$

Siendo $c = 0,0053468^\circ$ ([22]).

Por ejemplo, dibujemos un Espiral Dorado con $a=0,001$

El espiral es el siguiente⁸:



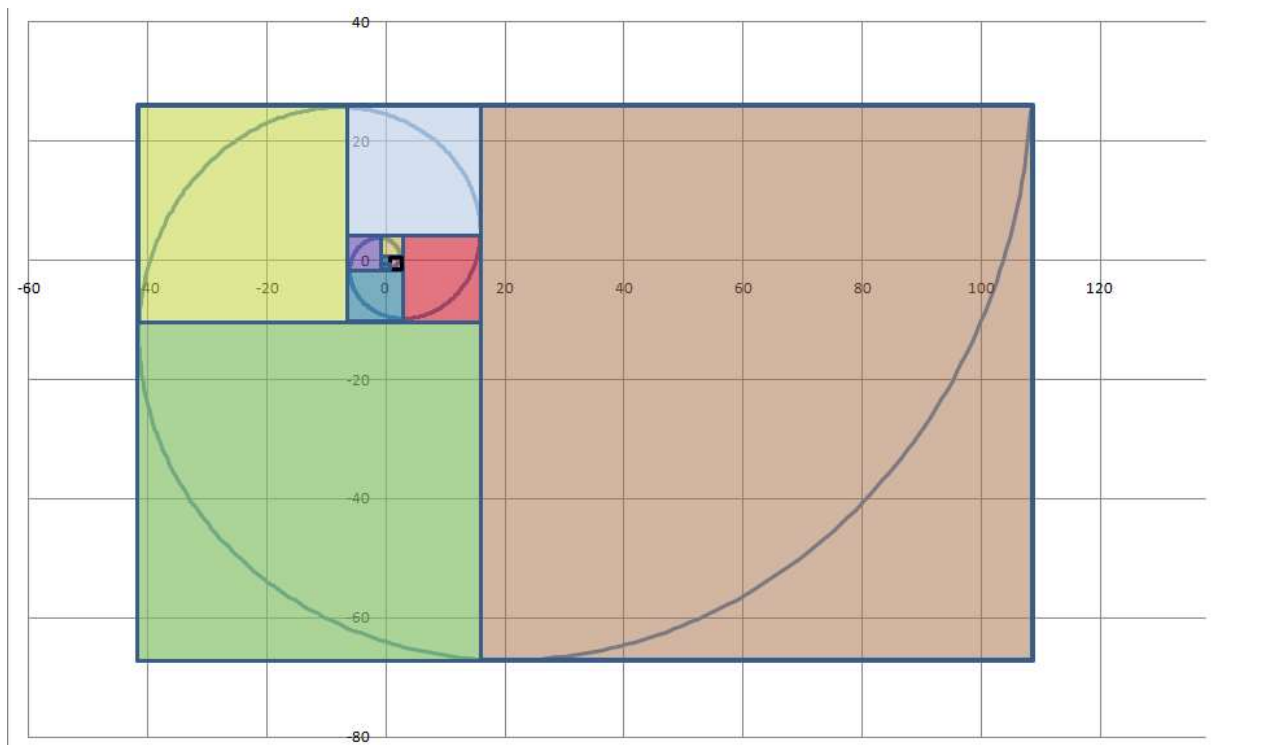
El Espiral de Oro se encuentra presente en la naturaleza y como no en nuestra flor matemática, el girasol.

⁸ Archivo Excel para dibujar Espirales bajado de <http://timwolverson.wordpress.com/2014/02/08/plot-a-fibonacci-spiral-in-excel/>



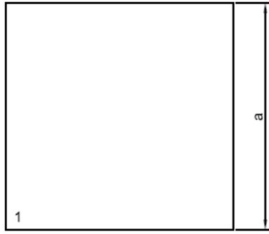
Espiral Dorado presente en un girasol

Existe también en Espiral de Fibonacci que es muy parecido al Espiral Dorado, incluso algunos autores se refieren a este como el Espiral Dorado. Su similitud es tal que también se dice está presente en la naturaleza. Para dibujar un Espiral de Fibonacci, se parte de rectángulos con la proporción del Número de oro. Tal como muestra la siguiente imagen.

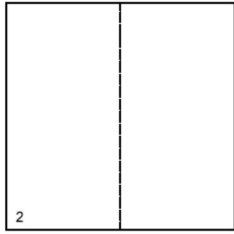


¿Cómo dibujar un Espiral de Fibonacci?

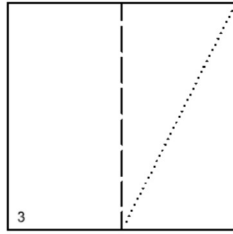
Comienza con un cuadrado perfecto de lado a



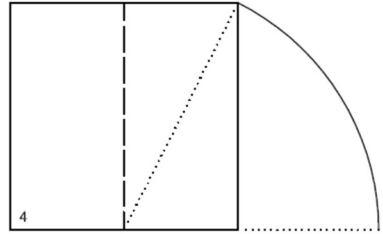
Córtalo por la mitad



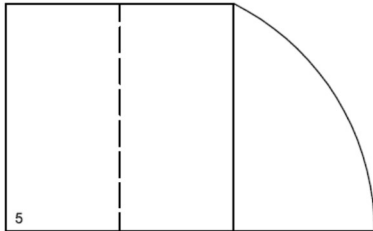
Dibuja una diagonal al lado opuesto



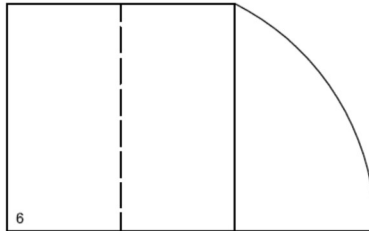
Dibuja un arco usando esa línea como radio



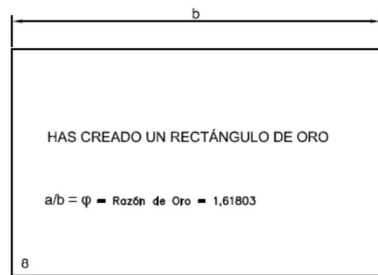
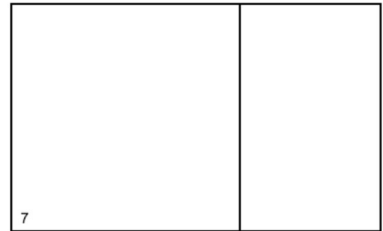
Extiende una línea desde el cuadrado original hasta el arco



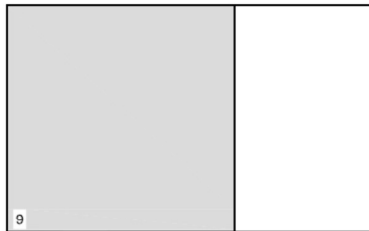
Dibuja una línea perpendicular desde ese punto



Completa el rectángulo desde el cuadrado con el lado largo b.



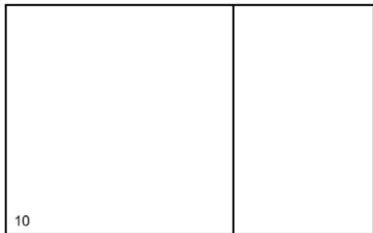
¿Quieres crear un Espiral de Fibonacci?
Recuerda el primer cuadrado



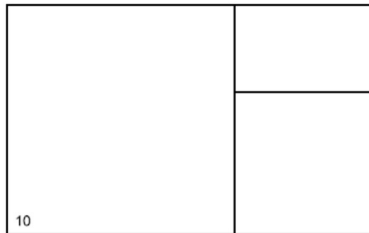
Observa el rectángulo que queda al costado del cuadrado



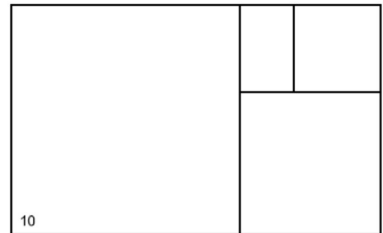
Es una versión más pequeña del rectángulo de oro



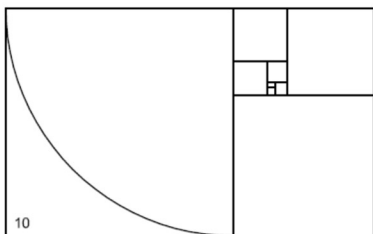
Podemos dibujar un cuadrado



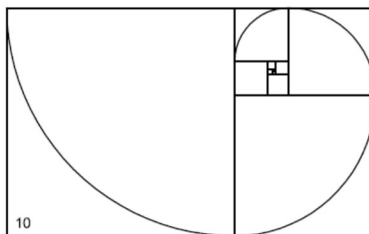
Y podemos seguir para siempre



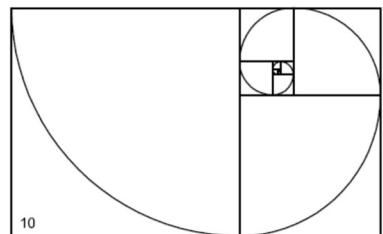
Si hacemos una arco en el primero cuadrado



Y lo repetimos en cada cuadrado...



obtenemos el ESPIRAL DE FIBONACCI



Si bien es comprensible que la naturaleza se ha desarrollado en forma eficiente, adaptándose a su entorno y buscando las formas de estructuras que le permitan optimizar la energía que requiere para su desarrollo, resulta sorprendente cómo la Sucesión de Fibonacci, que surgió de la simple idea de generar el siguiente número a partir de la suma de los dos anteriores, esté presente en el girasol de diferentes maneras.

Al empezar este trabajo, pensé que iba a ser mucho más simple, nunca me imaginé que los girasoles, que a primera vista son solo sorprendentes porque siguen al sol, podía esconder tantas relaciones matemáticas, como una secuencia escrita hace tanto tiempo y números, ángulos y espirales que se infieren de ésta. Todo esto lo hacen para ser más eficientes, ya que como dije anteriormente, solo los seres vivos que se adaptan más fácilmente al ambiente sobreviven.

El conocer las matemáticas de la naturaleza, como en este caso de los girasoles, nos permite utilizar esos modelos en creaciones humanas, para hacerlas óptimas desde diferentes puntos de vista. Como por ejemplo el almacenamiento y la distribución de la información, en la cual se usa la sucesión de Fibonacci como parte de su diseño, pero eso queda pendiente para otro trabajo.

Bibliografía:

La información del presente trabajo fue obtenida de las siguientes fuentes:

Mathematical Games - The multiple fascinations of the Fibonacci sequence. by Martin Gardner. Publicado por Scientific American INC. 1969.

<http://www.mscs.dal.ca/fibonacci/>

<http://britton.disted.camosun.bc.ca/fibslide/jbfibslide.htm>

http://es.wikipedia.org/wiki/Sucesi%C3%B3n_matem%C3%A1tica

<http://www.ecoosfera.com/2012/09/las-matematicas-dentro-de-los-girasoles/>

<http://www.veoverde.com/2012/08/girasoles-una-maravilla-matematica/>

<http://fibonacci.ucoz.com/index/anglo-9>

<http://www.sapiensman.com/matematicas/matematicas19.htm>

<http://www.popmath.org.uk/rpamaths/rpampages/sunflower.html>

<http://www.maths.surrey.ac.uk/hosted-sites/R.Knott/Fibonacci/fibnat2.html>

www.treehugger.com/slideshows/natural.science/nature-blows-my-mind-hypnotic-patterns-sunflowers/

<http://www.mathsisfun.com/numbers/nature-golden-ratio-fibonacci.html>

http://es.wikipedia.org/wiki/Leonardo_de_Pisa

http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/0/04/Liber_abbaci_magliab_f124r.jpg

<http://101qs-media.s3.amazonaws.com/largethumbs/450-sunflowers-consulted-fibonacci-for-optimization.jpg>

<http://fibonacci.ucoz.com/index/ang/anglo-9>

<http://demonstrations.wolfram.com/PhyllotaxisSpirals/>